第９講　原子と原子核Ⅰ

1

次の文を読んで，[　　　　]には適した式または数値を，{　　　}には図３から適切なものを選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。また，問１，問２では指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

電磁波の一種である γ 線の放射と測定について考察しよう。物質を構成する原子は電子と原子核からなり，原子核の内部のエネルギーが高い状態から低い状態に移るときに，原子核から γ 線が放射される。以下では，電子の質量は原子核の質量と比較して非常に小さいため，無視できるものとする。

振動数 f の電磁波は，ある一定のエネルギーをもった粒子の集まりと考えることができ，その粒子を光子という。光子１個のエネルギーは hf，運動量は電磁波の進む向きに $\dfrac{hf}{c}$ の大きさであることがわかっている。ここで，h はプランク定数とよばれる定数であり，c は光速である。

以下において，原子核の内部のエネルギー状態には，励起状態とよばれるエネルギーの高い状態と基底状態とよばれるエネルギーの最も低い状態の２つがあるものとする。励起状態のエネルギーを E_{e}，基底状態のエネルギーを E_{g} とし，そのエネルギー差を $\Delta E = E_{\mathrm{e}} - E_{\mathrm{g}}$ とする。

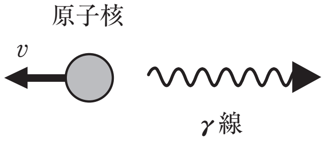


図１

まず，質量 M の原子核１個による γ 線放射を考える。原子核が励起状態から基底状態に移るときに，γ 線の光子が１個放射される。静止していた原子核は，図１のように γ 線放射の反作用により速さ v で動き出す。速さ v の原子核の運動エネルギーと運動量の大きさは，原子核が基底状態にあるか励起状態にあるかに関わりなく，それぞれ $\dfrac{1}{2}Mv^2$，Mv としてよい。また，原子核の全エネルギーは内部のエネルギー（E_{e} または E_{g}）と原子核の運動エネルギーの和で与えられる。よって原子核から振動数 f_1 の γ 線が放射される場合，エネルギー保存則は ΔE を用いて [　あ　]，運動量保存則は [　い　] と書くことができる。ここで，ΔE は Mc^2 に比べ充分に小さいことがわかっている。絶対値が１より充分小さい数 δ に対して成り立つ近似式 $\sqrt{1+\delta} \fallingdotseq 1 + \dfrac{1}{2}\delta - \dfrac{1}{8}\delta^2$ を用いると，f_1 は ΔE，M，c，h を用いて [　う　] となる。

次に，この原子核をもつ原子 N 個で構成されている静止した結晶からの γ 線光子１個の放射を考える。この結晶の質量は NM で与えられる。以下では，結晶は充分低温であるものとし，原子核が結晶中に固定され，γ 線を放射する原子核はその反作用を受けても結晶中

< Note >

に固定されたままであるとする。この場合，γ 線放射の反作用は結晶全体で受け止められ，結晶が速さ v_N で動き出すものとする。このときの放射 γ 線の振動数 f_N は ΔE，M，N，c，h を用いて［　え　］となる。また，構成する原子数が無限大とみなせる大きい結晶の場合，放射される γ 線の振動数は $f_\infty = \dfrac{\Delta E}{h}$ となる。

問１　原子 N 個で構成されている静止した結晶からの γ 線光子１個の放射について，エネルギー保存則と運動量保存則を記述せよ。さらに N が無限大とみなせるとき，エネルギー保存則において結晶の運動エネルギーの項がその他の項に比べ無視でき，その結果，放射 γ 線の振動数が f_∞ となることを説明せよ。

同様の考察により，同じ種類の原子で構成されている静止した大きい結晶に γ 線を当てると，この結晶は振動数 f_∞ の γ 線のみをよく吸収することがわかっている。このような結晶をここでは吸収体とよぶ。

次に，図２のような実験装置を用いた γ 線の測定を考えよう。

γ 線源は同じ種類の N 個の原子で構成された結晶多数からなり，振動数 f_N の γ 線を一定の強度(単位時間当たりに放射される γ 線の光子数)で放射するものとする。吸収体を乗せた台車を水平な床の上におき，図２のように左端を床に固定したばねにつなぐ。γ 線源は台車から充分に遠方に置かれ，γ 線は吸収体付近で図２の x 軸に平行に進むものとする。吸収体の表面は x 軸に垂直である。吸収体は，振動数 f_∞ 以外の振動数の γ 線を透過させるが，振動数 f_∞ の γ 線を完全に吸収するものとする。吸収体の後方の床上に γ 線強度測定器を設置する。吸収体からの γ 線放射は無視できるものとする。

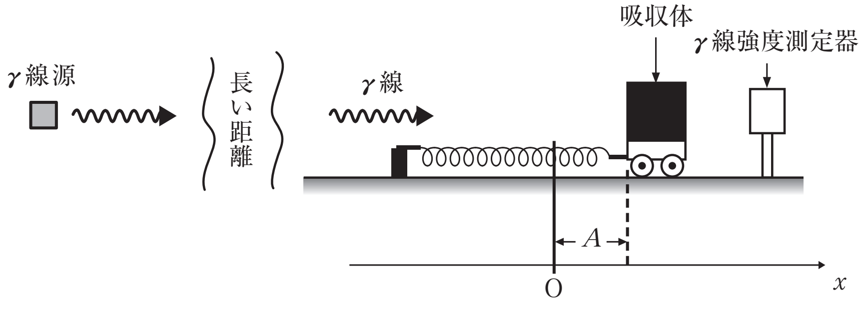


図２

ばねを自然の長さのときの位置 O から A だけ伸ばして，時刻 $t=0$ に静かに放すと，台車は x 軸に平行に角振動数 ω で単振動をする。以下では，吸収体の運動により，吸収体中で観測される γ 線の振動数 f_d は音波のドップラー効果と同じ変化をするものとする。なお，吸収体の屈折率による γ 線の速度の変化は無視できるものとする。この場合，γ 線の波長を λ とすると，吸収体が速さ V で運動しているときは，静止しているときに比べ，単位時間当たりに吸収体に到達する波の数が $\dfrac{V}{\lambda}$ だけ変化する。よって，時刻 t において $\dfrac{f_\mathrm{d}}{f_N} = \dfrac{\text{［　お　］}}{c}$

< Note >

の関係がある。（ **お** は λ，V を用いずに表せ。）

台車が動き始めてから時刻 t_1 で突然，測定器で測定される γ 線強度が変化した。$f_{\rm d}$ が f_∞ に一致したからである。絶対値が 1 より充分小さい数 δ に対して成り立つ近似式 $\dfrac{1}{1-\delta} \fallingdotseq 1+\delta$ を用いると，ωt_1 の満たす条件は $\sin\omega t_1 =$ **か** である。（ **か** は f_∞，f_N，$f_{\rm d}$ を用いずに表せ。）

ここで，$Mc^2=1\times10^{-8}$J，$\varDelta E=2\times10^{-14}$J の原子核の γ 線放射において，$N=10^4$，$A=0.1$m のときに $\omega t_1 = \dfrac{\pi}{6}$rad で測定される γ 線強度が変化したとする。なお，$c=3\times10^8$m/s とする。このときの ω を有効数字 1 けたで求めると **き** rad/s である。また，台車が一周期単振動するとき，測定される γ 線強度と ωt の関係は図 3 の｛ く ｝のように予想される。

問２　図 3 で｛ く ｝を選択した理由を記述せよ。

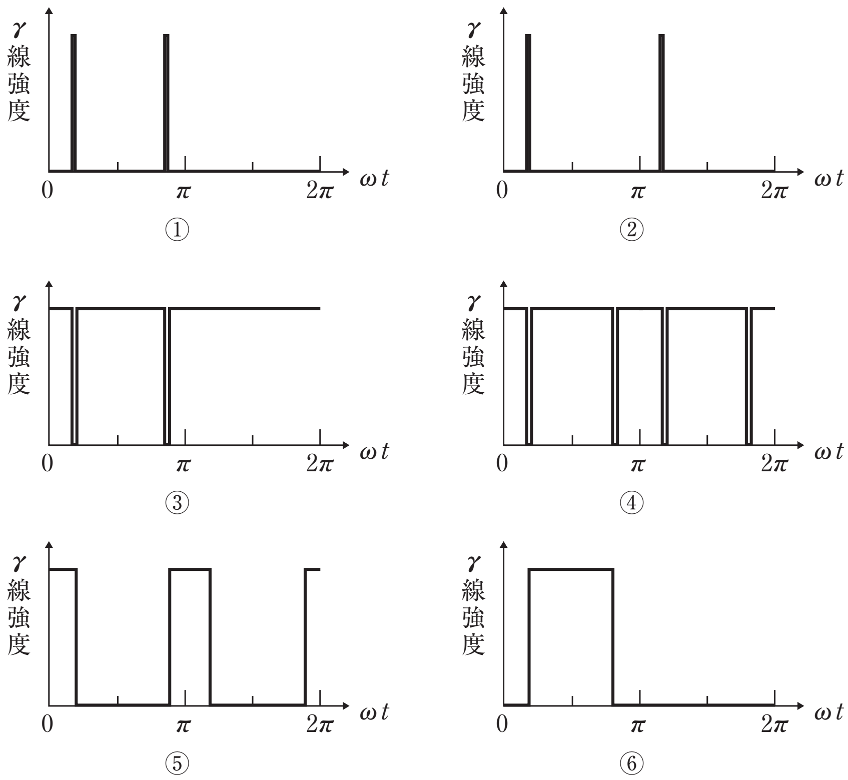


図３

< Note >

2

次の文を読んで，［　　　］には適した式または数値を，それぞれの解答欄に記入せよ。また，｛　　　｝には選択肢あるいは選択図(グラフ)から適したものを選び，その番号を解答欄に記入せよ。なお，［［　　　］］はすでに［　　　］で与えられたものと同じものを表す。

振動数 ν〔Hz〕の光は，運動量［あ］〔kg･m/s〕，エネルギー［い］〔J〕を持つ粒子「光子」の集まりであると考えることができる。ただし，プランク定数を h〔J･s〕，光の速さを c〔m/s〕とする。一方，水素原子の内部の電子のエネルギーはとびとびの値をとる。基底状態のエネルギーの値を E_1〔J〕，ある励起状態のエネルギーの値を E_2〔J〕とし，この２つの状態のみを考えることにする。ただし，E_2-E_1〔J〕は，およそ $h\nu$〔J〕に等しいとする。水素原子の速さを V〔m/s〕，質量を M〔kg〕としたときの，水素原子の全エネルギーは，$\left(\dfrac{V}{c}\right)^2$ が１より十分小さいときには，水素原子の重心運動の運動エネルギー($\dfrac{1}{2}MV^2$〔J〕)と水素原子内部の電子のエネルギー(E_1〔J〕または E_2〔J〕)の和となる。ただし，水素原子の大きさは無視でき，以下の実験はすべて真空中で行うものとする。

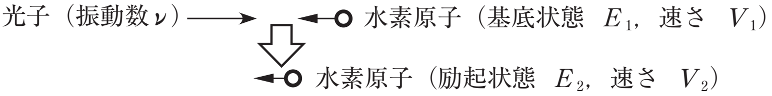


図１

(1)　図１のように，運動量［［あ］］〔kg･m/s〕でエネルギー［［い］］〔J〕の光子と，基底状態にあり光と反対向きに速さ V_1〔m/s〕で運動している水素原子が１つあったとする。水素原子が光子を吸収し，励起状態に励起され，速さが V_2〔m/s〕になった。ただし，水素原子の運動の向きは変わらないとする。このとき，水素原子と光子の全エネルギー保存の式は［う］となり，また，運動量保存の式は［え］となる。［［う］］と［［え］］から V_2 を消去すると，$E_2-E_1=$［お］となる。この条件を満たすときに水素原子は，光子を吸収することができる。この式に現れる $\dfrac{1}{2M}\left(\dfrac{h\nu}{c}\right)^2$ の項は反跳エネルギーと呼ばれ，通常は非常に小さいので無視してよい。したがって，光と反対向きに運動している水素原子は，静止している時に比べて，｛か：①　長い波長，②　短い波長｝の光を吸収することがわかる。

(2)　上では１個の光子の吸収過程を考察したが，今度は，多数個の光子が水素原子の進行方向と逆向きからやってくる場合を考察する。光子を吸収して励起状態に励起された水素原子は，ある時間の後に光子を放出して再び基底状態にもどる。基底状態にもどった水素原子は，対向してやってくる光子を再び吸収することができる。このような光子の吸収・放出の過程を繰り返すことにより水素原子は光から一定の力を受け，減速する。ただし，(1)で考察したように，減速するにつれて水素原子が吸収できる光の波長は変化してしまうが，

＜ Note ＞

その変化は小さいので，減速の過程においても水素原子は，速度によらず一定の運動量 あ 〔kg･m/s〕の光子を吸収するものとする。また，励起状態にある水素原子はいろいろな向きに光子を放出するため，多数回の光子の放出過程においては平均として水素原子は力を受けない。したがって，毎秒平均 n 回だけ水素原子が光子の吸収・放出を繰り返すとき，水素原子が受ける平均の力の大きさは， き 〔N〕で表される。したがって，初速度 V_1〔m/s〕で運動していた水素原子は等加速度運動をして，距離 く 〔m〕だけ進んで速度 0 になる。ただし，水素原子の運動は直線運動であるとする。

(3)　通常の高温の気体原子は，高速度の熱運動をしていてその運動に重力の効果を見出すことは難しい。しかし最近，上で考察したように光からの力により原子の速度をほとんど 0 にまですることができるようになり，このように低速になった原子の運動では重力の影響が支配的になる。水素原子を鉛直上向きに噴水のように打ち上げた場合を考察してみよう。ただし，水素原子の運動は鉛直方向の直線運動のみとする。

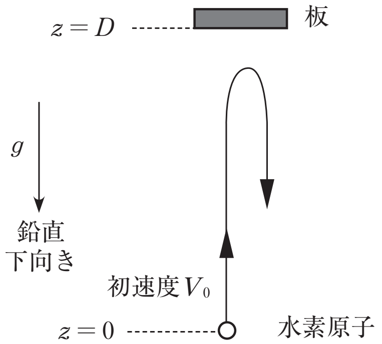


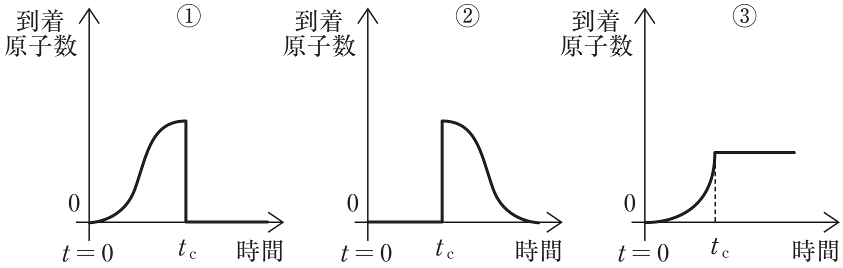
図２

図２のように，水素原子を位置 $z=0$ で，時刻 $t=0$ に，鉛直上向きに初速度 V_0〔m/s〕で打ち上げると，時刻 け 〔s〕には，再び同じ $z=0$ の位置にもどってくる。ここで重力加速度を g〔m/s^2〕とする。

さらに，位置 $z=D$〔m〕に板を置いておき，そこに水素原子が到着した場合には原子は吸着されてしまうとする。水素原子が再び $z=0$ の位置にもどってくることができるためには，水素原子の打ち上げ初速度 V_0〔m/s〕は， こ 〔m/s〕以下でなければならない。

さて，より現実的な状況として， こ 〔m/s〕を中心とした初速度分布をもった水素原子の集まりを考える。この水素原子の集まりを，時刻 $t=0$ に，位置 $z=0$ から同時に打ち上げた場合，再び位置 $z=0$ に到着する水素原子数の時間分布は，｛さ：選択図１より選択｝のようになる。また，この図中の t_c〔s〕は，D，g を用いて $t_c=$ し 〔s〕と表される。以上のような実験を行い，D〔m〕と t_c〔s〕に対して，それぞれ，$D=1.226$m，$t_c=1.000012$s という測定値を得た。これから g(m/s^2〕の値を有効数字の範囲で求めると， す 〔m/s^2〕となる。

< Note >



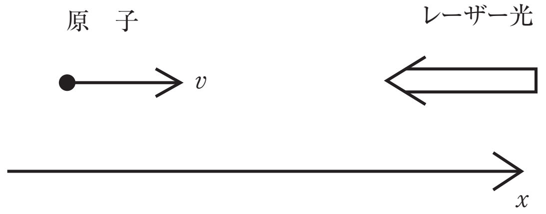
選択図１

< Note >

第９講　確認テスト

次の文を読んで，[　　　]に適した式または語句を，[[　　　]]には数値を，また｛　　　｝の中の正しいものの番号をそれぞれの解答欄に記入せよ。ただし，数値は有効数字１けたで解答せよ。

光によって原子やイオン等の運動を次のようにして制御することができる。図に示すように，速度 v〔m/s〕で x 軸の正の向きに運動している原子にそれと対向する向きに振動数 ν〔Hz〕のレーザー光を照射した場合を考えよう。光速度を c〔m/s〕とすると，速度 v で運動をしている原子から見ればレーザー光の振動数は[イ]と呼ばれる効果により，ν'＝[ロ]〔Hz〕のようになる。従って，原子が静止している時には振動数 ν_0〔Hz〕の吸収線をもっているものとすると，レーザー光の振動数が ν＝[ハ]になったときレーザー光は吸収される。ところで，プランク定数を h〔J･s〕とすると，振動数 ν の光はエネルギー $h\nu$〔J〕，運動量の大きさ $\dfrac{h\nu}{c}$〔N･s〕をもつ光子の集まりであると考えられる。このように光子は運動量をもっているので，光を吸収するとき原子は[ニ]の方向の力積を受ける。光を吸収し，高いエネルギー状態に励起された原子はエネルギーを放出して再び元のエネルギー状態に戻り，このとき原子は力積を受けないものとする。この結果光を吸収することによって原子の速度は変化する。原子の速度が変化しても光を吸収し続けるためには，速度変化に応じてレーザー光の振動数を｛**ホ**：①次第に増加させ　②一定に保持し　③次第に減少させ｝なければならない。



いま，速度 $v=3\times10^{2}$m/s，質量 $m=4\times10^{-26}$kg の原子に，図のように，レーザー光を照射した場合を考えよう。レーザー光の振動数は最初 5×10^{14}Hz であったとする。この振動数を微小に変化させて光を吸収させ，原子を静止させることができたとすると，原子は静止するまでの間に[[ヘ]]個の光子を吸収し，費やされたエネルギーは[[ト]]〔J〕となる。また，その間のレーザー光の振動数変化量は[[チ]]〔Hz〕になる。ただし，プランク定数を $h=6.6\times10^{-34}$J･s，光速度を $c=3\times10^{8}$m/s とせよ。

また，空間のある領域内に閉じ込められている原子やイオンの運動を光によって制御し，ついには静止させることもできる。例えば，x 軸上のみを動きうる，質量 m〔kg〕，電荷 q〔C〕($q>0$)のイオンに，x 軸の方向に $E(x)=-kx$〔N/C〕(k は正の定数)で表される電界を加えて閉じ込めた場合を考えよう。この電界がイオンに与える力 F は $F(x)=$[リ]〔N〕で表

< Note >

される。$x=0$ における位置エネルギーを 0 とすると，イオンは位置エネルギー $U(x)=$ **［ヌ］**〔J〕をもつことになる。イオンが時刻 $t=0$ で，位置 $x=0$ を速度 v_0〔m/s〕で通過する場合には，$t>0$ では **［ル］** と呼ばれる運動をすることになり，イオンの位置 x〔m〕及び速度 v は時刻 t〔s〕の関数として，$x=$ **［ヲ］**，$v=$ **［ワ］** のように表すことができる。レーザー光を照射させイオンの運動を次第に弱めるためには，レーザー光の振動数は静止したイオンの吸収線の振動数｛**カ**：①より高く　②に等しく　③より低く｝しなければならない。

< Note >

第９講　解答

1

あ　$\varDelta E=\frac{1}{2}Mv^2+hf_1$　　い　$0=Mv-\frac{hf_1}{c}$　　う　$\frac{\varDelta E}{h}\left(1-\frac{\varDelta E}{2Mc^2}\right)$

え　$\frac{\varDelta E}{h}\left(1-\frac{\varDelta E}{2NMc^2}\right)$　　お　$c+A\omega\sin\omega t$　　か　$\frac{\varDelta E}{2A\omega NMc}$　　き　0.6

く　③

問１　エネルギー保存則：$\varDelta E=\frac{1}{2}NMv_N{}^2+hf_N$

運動量保存則：$0=\frac{hf_N}{c}-NMv_N$　　　（証明は略）

問２　吸収体の速度が $t=t_1$ のときと一致する場合のみ，吸収体は γ 線を吸収する。そして，それは一周期の前半に２回のみ存在するから。

2

あ　$\frac{h\nu}{c}$　　い　$h\nu$　　う　$\frac{1}{2}MV_1{}^2+E_1+h\nu=\frac{1}{2}MV_2{}^2+E_2$

え　$MV_1-\frac{h\nu}{c}=MV_2$　　お　$h\nu\left(1+\frac{V_1}{c}\right)-\frac{1}{2M}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2$　　か　①　　き　$\frac{nh\nu}{c}$

く　$\frac{McV_1{}^2}{2nh\nu}$　　け　$\frac{2V_0}{g}$　　こ　$\sqrt{2gD}$　　さ　①　　し　$2\sqrt{\frac{2D}{g}}$

す　9.808

第９講　確認テスト

【解答】

イ　ドップラー効果　ロ　$\dfrac{c+v}{c}\nu$　ハ　$\dfrac{c}{c+v}\nu_0$　ニ　負　ホ　①

ヘ　1×10^4　ト　4×10^{-15}〔J〕　チ　5×10^8〔Hz〕　リ　$-qkx$

ヌ　$\dfrac{1}{2}qkx^2$　ル　単振動　ヲ　$v_0\sqrt{\dfrac{m}{qk}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{qk}{m}}t\right)$

ワ　$v_0\cos\left(\sqrt{\dfrac{qk}{m}}t\right)$　カ　③

【解説】

イ　ドップラー効果

ロ　$\nu'=\dfrac{c+v}{c}\nu$

ハ　原子から見て，振動数が ν_0 であれば吸収できるので，$\nu_0=\dfrac{c+v}{c}\nu$

$\therefore\quad \nu=\dfrac{c}{c+v}\nu_0$

ニ　負

ホ　v は小さくなる → $\dfrac{c}{c+v}$ は大きくなる。よって増加①。

ヘ　運動量に注目。求める個数を N とすると，

$mv-\dfrac{h\nu}{c}\times N=0$

$\therefore\quad N=\dfrac{mvc}{h\nu}=\dfrac{4\times10^{-26}\times3\times10^2\times3\times10^8}{6.6\times10^{-34}\times5\times10^{14}}\fallingdotseq1\times10^4$

ト　$h\nu\times N=h\nu\times\dfrac{mvc}{h\nu}=mvc=4\times10^{-26}\times3\times10^2\times3\times10^8=4\times10^{-15}$〔J〕

チ　$\nu_0-\nu=\dfrac{c+v}{c}\nu-\nu=\dfrac{v}{c}\nu=\dfrac{3\times10^2}{3\times10^8}\times5\times10^{14}=5\times10^8$〔Hz〕

リ　$F(x)=(-q)E(x)=-qkx$

ヌ　$U(x)=\int_x^0F(x)dx=\dfrac{1}{2}qkx^2$

ル　イオンの運動方程式は $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-qkx$　となり，単振動をする。

ヲ　$t=0$ で $x=0$ ゆえ，

$$x=A\sin\omega t \quad \cdots① \quad \left(\omega=\sqrt{\frac{qk}{m}}\right)$$

$$v=\frac{dx}{dt}=\omega A\cos\omega t \quad \cdots②$$

と書けるが，$t=0$ で $v=v_0$ ゆえ，

$$\omega A=v_0 \qquad \therefore\ A=\frac{v_0}{\omega}=v_0\sqrt{\frac{m}{qk}}$$

①へ代入して，

$$x=v_0\sqrt{\frac{m}{qk}}\sin\left(\sqrt{\frac{qk}{m}}\,t\right)$$

ワ　②より，$v=v_0\cos\left(\sqrt{\frac{qk}{m}}\,t\right)$

カ　③